

Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange

GILBERT LABELLE*

Université du Québec à Montréal, Montréal, Québec H3C 3P8, Canada

INTRODUCTION

Dans le cadre du Séminaire de Combinatoire de l'Université du Québec à Montréal (automne 79–hiver 80), André Joyal a jeté les bases d'une théorie combinatoire des séries génératrices exponentielles fondée sur le concept d'*espèce de structures* [4]. Cette théorie permet de relever au plan conceptuel les équations et relations algébriques entre les séries génératrices par l'introduction d'opérations (addition, multiplication, substitution, dérivation, etc.) sur les espèces de structures. Parmi les toutes premières applications illustrant l'efficacité de la méthode, Joyal a obtenu une nouvelle démonstration (voir [4, 8] et section 3 du présent texte) de la formule de Cayley (n^{n-1}) pour le nombre d'arborescences sur un ensemble fini de cardinalité n . Cette démonstration élégante est basée sur l'étude des rapports qui existent entre les espèces de structures *endofonction* et *vertébré* (= *arbre bipointé*).

C'est en étendant cette démonstration et en travaillant à l'intérieur de la théorie des espèces de structures que l'auteur a été conduit à démontrer combinatoirement une version *enrichie* de la formule de Cayley qui s'avère essentiellement identique à la formule d'inversion de Lagrange. Le présent texte gravite autour de ce thème.

On trouvera dans la section 1 un survol rapide des versions classiques des théorèmes de Lagrange et de Cayley. On profitera de ce chapitre pour fixer une terminologie ainsi que des notations. La section 2 contient les éléments de la théorie combinatoire des espèces de structures dont nous aurons besoin pour mener à terme notre étude. La section 3 introduit les espèces *arborescence enrichie* et *endofonction enrichie*. Ce sont les liens qui existent entre ces deux espèces qui vont nous permettre, entre autres, de démontrer combinatoirement la première version (dite simple) de la formule de Lagrange. Après avoir défini l'espèce *forêt d'arborescences enrichies* nous

* Travail fait dans le cadre de la subvention FCAC [EQ 1608] du Ministère de l'Éducation du Gouvernement du Québec.

démontrons, dans la section 4, la deuxième version (dite composée) de la formule de Lagrange. La section 5 porte sur une espèce parente des précédentes qui est celle d'*arbre enrichi*. La section 6 poursuit l'étude de ces espèces d'arbres en faisant intervenir un paramètre supplémentaire, celui du nombre de *feuilles*. Finalement, nous montrons dans la section 7 comment on peut généraliser facilement les fameuses identités d'Abel [17] en utilisant les *haies d'arborescences enrichies*.

La lecture du présent travail ne demande aucun prérequis. Le lecteur intéressé à poursuivre l'étude de la théorie générale des espèces de structures est invité à prendre connaissance de [4] qui est l'article de fond sur le sujet. Il pourra aussi consulter [8] qui est surtout axé sur les exemples.

1. LES FORMULES DE LAGRANGE ET DE CAYLEY: TERMINOLOGIE ET NOTATIONS

Soit \mathbb{K} un corps commutatif quelconque de caractéristique zéro et désignons par $\mathbb{K}[[x]]$ l'anneau des séries formelles en x à coefficients dans \mathbb{K} . Les $f(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ qui satisfont $f(0) = 0 \neq f'(0)$ constituent, c'est bien connu, un groupe (non abélien) sous l'opération de composition (i.e., substitution) des séries formelles. La formule d'inversion de Lagrange [10] permet d'écrire explicitement l'inverse compositionnel $f^{(-1)}(x)$ de $f(x)$ comme suit

$$f^{(-1)}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{t}{f(t)} \right)^n \Big|_{t=0} \cdot \frac{x^n}{n!}. \quad (1.1)$$

Plus généralement, pour tout $F(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ on a le développement

$$F(f^{(-1)}(x)) = F(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left[F(t) \left(\frac{t}{f(t)} \right)^n \right] \Big|_{t=0} \cdot \frac{x^n}{n!}. \quad (1.2)$$

En posant $f(x) = x/R(x)$ et $f^{(-1)}(x) = A(x)$ on peut écrire (1.1) et (1.2) sous les formes commodes

$$A(x) = xR(A(x))$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (R(t))^n \Big|_{t=0} \cdot \frac{x^n}{n!} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(A(x)) = F(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [F(t)(R(t))^n] \Big|_{t=0} \cdot \frac{x^n}{n!}. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Les développements (1.3) et (1.4) seront ici respectivement appelés *version simple* et *version composée* de la *formule de Lagrange*.

Les démonstrations existantes pour ces formules utilisent les procédés les

plus divers. Certaines sont essentiellement analytiques [6, 7, 10, 21] tandis que d'autres sont de nature plutôt algébrique ou combinatoire [2, 3, 5, 9, 16, 18-20].

D'autre part, le résultat célèbre de Cayley [1] dit que le nombre a_n d'arborescences (=arbres avec racine) étiquetées par les nombres entiers de 1 à n est donné par

$$a_n = n^{n-1}. \quad (1.5)$$

Ce nombre est remplacé par

$$a_n^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{n} \binom{n}{\lambda} n^{n-\lambda} \quad (1.6)$$

lorsqu'il s'agit plutôt de forêts de λ arborescences étiquetées.

Il existe aussi de multiples démonstrations de ces formules et on peut en trouver un compte rendu détaillé dans l'excellente monographie de Moon [11]. Certaines de ces démonstrations établissent constructivement des bijections entre l'ensemble des arbres étiquetés par $\{1, \dots, n\}$ et l'ensemble des $(n-2)$ -tuples d'entiers compris entre 1 et n ; par exemple les suites de Prüfer [15] et les suites de Neville [14] réalisent de telles bijections. D'autres preuves s'attachent plus spécialement aux divers problèmes de dénombrements suggérés par le contexte; par exemple Moon [12, 13] considère une classification des arbres étiquetés basée sur le degré des divers sommets.

Il existe aussi des démonstrations utilisant les séries génératrices; par exemple celle de Pólya [11] fait appel à un cas spécial de la formule d'inversion de Lagrange (version simple) en résolvant pour A l'équation $A = xe^A$ où $A = A(x)$ est la série génératrice exponentielle

$$A(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{n!}$$

dont le coefficient général a_n représente le nombre d'arborescences sur n points.

Enfin, la démonstration combinatoire de A. Joyal (mentionnée dans l'introduction) est purement conceptuelle et possède le caractère remarquable de pouvoir s'étendre à une démonstration de la formule de Lagrange elle-même.

2. ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE COMBINATOIRE DES ESPÈCES AU SENS DE JOYAL

La théorie combinatoire des espèces de structures au sens de Joyal est à la fois unificatrice, simplificatrice et efficace. Nous allons l'utiliser pour

présenter et démontrer nos résultats. Nous avons donc rassemblé ici, sous forme de résumé, les notions élémentaires de cette théorie qui sont nécessaires à notre propos.

En bref, on définit une *espèce* S de structures comme étant tout simplement un foncteur

$$S: \text{Ens}_{\text{finis}, \text{bij}} \rightarrow \text{Ens}_{\text{finis}} \quad (2.1)$$

de la catégorie (groupeïde) des ensembles finis et bijections vers la catégorie des ensembles finis et fonctions. Si U est un ensemble fini, on interprète $S(U)$ comme l'ensemble des structures d'espèce S sur U et si $\sigma: U \simeq V$ est une bijection, on interprète (la bijection) $S(\sigma): S(U) \simeq S(V)$ comme le *morphisme de transport le long de* σ des structures d'espèce S sur U vers les structures d'espèce S sur V . Par exemple, si S est l'espèce *graphe connexe* alors $S(U)$ est l'ensemble des graphes connexes dont les sommets sont les éléments de U et si $g \in S(U)$ est un graphe connexe sur U alors $S(\sigma)(g) \in S(V)$ est le graphe connexe sur V déduit de g en renommant les sommets de g à l'aide de la bijection σ . On dit que deux espèces S et T sont *équipotentes* (notation $S \sim T$) si, pour tout ensemble fini U , les ensembles $S(U)$ et $T(U)$ ont même cardinalité. Les espèces S et T sont déclarées *isomorphes* (notation $S \simeq T$) s'il existe un isomorphisme *naturel* $S \simeq^\beta T$ entre les foncteurs S et T . Il est évident que $S \simeq T \Rightarrow S \sim T$. L'implication inverse est cependant fautive en général. On peut le voir en considérant, par exemple, les espèces L *ordre linéaire* (où $L(U)$ est l'ensemble des ordres totaux sur U) et S *permutation* (où $S(U)$ est l'ensemble des permutations sur U) qui sont équipotentes mais non isomorphes (voir [4, 8] pour les détails). La relation d'équipotence ne retient que les cardinalités tandis que celle d'isomorphisme retient toutes les informations structurelles pertinentes.

On réserve les notations 0 , 1 et X pour désigner respectivement l'espèce *vide* (i.e., $0(U) = \emptyset$ pour tout U), l'espèce *ensemble vide* (i.e., $1(U) = \{\emptyset\}$ si $U = \emptyset$ et $1(U) = \emptyset$ si $U \neq \emptyset$) et l'espèce *singleton* (i.e., $X(U) = \{U\}$ si U est un singleton et $X(U) = \emptyset$ sinon). L'espèce *ensemble* est désignée par E et est définie par $E(U) = \{U\}$ pour tout ensemble fini U . L'espèce *ensemble de cardinalité* λ sera désignée par E_λ (ou de façon plus suggestive, par $X^\lambda/\lambda!$). On aura donc $E_\lambda(U) = \{U\}$ si $|U| = \lambda$ et $E_\lambda(U) = \emptyset$ sinon.

Introduisons maintenant une variable formelle x . La *série génératrice* $S(x)$ d'une espèce donnée S (aussi appelée *cardinalité* de l'espèce S) est définie comme la série formelle exponentielle (ou de Hurwitz)

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} s_n \frac{x^n}{n!} \quad (2.2)$$

où s_n désigne la cardinalité de $S(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} = \{1, 2, \dots, n\}$. Remarquons que

$(d^n/dx^n) S(x)|_{x=0} = s_n$ et que si S et T sont deux espèces alors $S \sim T \Leftrightarrow S(x) = T(x)$. La théorie générale considère aussi plusieurs opérations sur les espèces. Celles dont nous aurons besoin dans le présent travail sont la *somme* $T + S$, le *produit* $T \cdot S$, la *composition* $T \circ S = T(S)$ (définie lorsque $S(\phi) = \phi$), la *dérivation* S' et le *pointage* S_\bullet . Voici comment ces opérations sont définies:

Pour un ensemble fini U ,

- $(T + S)(U)$ est la réunion disjointe de $T(U)$ et $S(U)$;
- $(T \cdot S)(U)$ est l'ensemble des quadruplets de la forme (U_1, U_2, t, s) où $U_1 \cup U_2 = U$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $t \in T(U_1)$, $s \in S(U_2)$;
- $(T \circ S)(U)$ est l'ensemble des triplets de la forme (P, σ, t) où P est une partition de l'ensemble U (en classes non vides), σ associe à chaque classe C de P une structure $s \in S(C)$ et où $t \in T(P)$;
- $S'(U)$ est l'ensemble $S(U^+)$ avec $U^+ = U \cup \{U\}$ = successeur de U ;
- $S_\bullet(U)$ est l'ensemble des couples (s, u) où $s \in S(U)$ et $u \in U$.

Les morphismes de transport associés sont dans chaque cas évidents. On démontre que toute espèce S satisfait $S \simeq X \circ S \simeq S \circ X = S(X)$, $S_\bullet \simeq X \cdot S'$ et que les opérations que l'on vient de définir ont des propriétés analogues à celles des séries formelles:

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x), \quad (T \cdot S)(x) = T(x) S(x), \quad (T \circ S)(x) = T(S(x)),$$

$$S'(x) = \frac{d}{dx} S(x), \quad S_\bullet(x) = x \frac{d}{dx} S(x), \quad E(x) = e^x.$$

La dernière égalité permet l'abus de notation $E \simeq e^x$ pour désigner l'espèce *ensemble*.

Nous conviendrons d'employer parfois certaines représentations graphiques suggestives pour désigner une structure générique d'espèce donnée. Par exemple, une structure générique d'espèce T (i.e., un $\tau \in T(U)$ quelconque où U est un ensemble fini arbitraire) pourra être représentée par



FIGURE 1

Une structure générique d'espèce $T \cdot S$ ou $T \cdot S \cdot W, \dots$ pourra être symbolisée par des figures telles que



FIGURE 2

où les séparations intérieures



indiquent l'ordre dans lequel sont effectués les produits considérés. Une structure générique d'espèce $T \circ S$ pourra s'illustrer graphiquement par une figure du genre

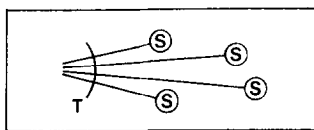


FIGURE 3

où



symbolise une structure d'espèce T construite sur l'ensemble des structures d'espèce S entrant en jeu dans le contexte considéré. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté nous utiliserons aussi les symboles \sim et \simeq entre de telles figures.

Considérons maintenant une espèce R quelconque. A plusieurs reprises nous aurons à faire appel aux *puissances* R^λ de l'espèce pour les valeurs λ entières ≥ 0 . Lorsque $\lambda > 0$, l'espèce R^λ est définie par

$$R^\lambda = R \cdot R \cdot \dots \cdot R \quad (\lambda \text{ facteurs}), \quad (2.3)$$

tandis que pour $\lambda = 0$ on pose $R^0 = 1$ (espèce *ensemble vide*). Ecrivons les séries génératrices de R et de R^λ comme suit

$$R(x) = \sum_{n \geq 0} r_n \frac{x^n}{n!} \quad (2.4)$$

et

$$R^\lambda(x) = (R(x))^\lambda = \sum_{n \geq 0} r_n(\lambda) \frac{x^n}{n!} \quad (2.5)$$

où les coefficients $r_n(\lambda)$ sont des fonctions du paramètre λ . On a en particulier $r_n(1) = r_n$. L'isomorphisme évident $R^{\lambda+\mu} \simeq R^\lambda \cdot R^\mu$ pour $\lambda, \mu \geq 0$ montre que pour tout $n \geq 0$ les fonctions $r_n(\lambda)$ satisfont l'identité *binomiale*

$$r_n(\lambda + \mu) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} r_i(\lambda) r_{n-i}(\mu). \quad (2.6)$$

Dans le cas particulier où $R \simeq e^x$ (i.e., l'espèce *ensemble*) on obtient $r_n(\lambda) = \lambda^n$ et l'identité (2.6) prend la forme de l'identité du binôme de Newton habituelle. Cela nous amène à formuler la définition qui suit.

DÉFINITION 1. La suite de fonctions $(r_n(\lambda))_{n \geq 0}$ définie par (2.5) est appelée la *suite de type binomial* associée à R . On écrira $R \vdash (r_n(\lambda))_{n \geq 0}$ pour exprimer ce fait.

Remarquons que l'équation (2.5) permet aussi de définir la notion de suite de type binomial associée à une série formelle (de Hurwitz) quelconque à coefficients dans un corps (commutatif) \mathbb{K} de caractéristique zéro arbitraire. Le cas spécial où les $r_n(\lambda)$ sont des polynômes a été abondamment étudié dans la littérature. Mentionnons, à titre d'information les travaux de Rota, Mullin et Roman [19, 20] qui placent ces suites polynomiales de type binomial au centre de la théorie algébrique générale des opérateurs linéaires invariants par translations (définis sur l'espace vectoriel de tous les polynômes sur un corps commutatif quelconque de caractéristique zéro). Le lecteur peut aussi consulter Labelle [9] qui les applique à l'étude de l'itération continue des séries formelles.

Dans le contexte de la théorie des espèces, la figure 4

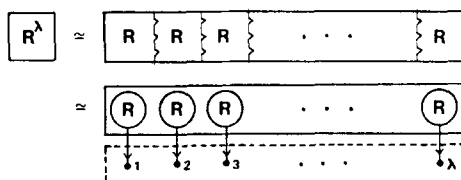


FIGURE 4

montre que l'on a l'interprétation combinatoire intéressante qui suit pour les structures d'espèce R^λ en termes de *coloriages enrichis*.

Canoniquement, la donnée d'une structure d'espèce R^λ sur un ensemble fini U c'est la donnée d'un λ -coloriage R -enrichi de l'ensemble U , c'est-à-dire

- (i) d'une fonction (coloriage)

$$f: U \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \lambda\}$$

et

- (ii) d'une structure d'espèce R sur chaque fibre (image réciproque d'un élément) de la fonction f .

Lorsque $R \vdash (r_n(\lambda))_{n \geq 0}$ alors, pour tout $n \geq 0$, on a

$$r_n(\lambda) = \text{nombre de } \lambda\text{-coloriages } R\text{-enrichis} \\ \text{d'un ensemble de cardinalité } n. \quad (2.7)$$

Cette interprétation combinatoire des suites de type binomial sera d'une grande utilité dans la section que nous allons maintenant aborder. Cette section rassemble les résultats fondamentaux du présent travail.

3. ARBORESCENCES ENRICHIES ET VERSION SIMPLE DE LA FORMULE DE LAGRANGE

Par définition, un *arbre étiqueté* par un ensemble fini U (on dira plus simplement *arbre sur U*) est un graphe (non orienté) connexe sans cycle dont les sommets sont les éléments de U . Une *arborescence étiquetée* par un ensemble fini U (on dira *arborescence sur U*) est un arbre sur U possédant une *racine* (i.e., un élément pointé dans U). Remarquons tout de suite que l'on peut munir les arborescences de deux orientations naturelles à cause de la présence de la racine. La première consiste à orienter les arêtes en les changeant en flèches qui *divergent* de la racine et la deuxième considère l'orientation qui *converge* vers la racine (voir la figure 5 où \star désigne la racine).

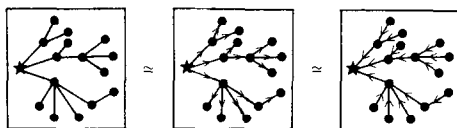


FIGURE 5

Dans le but de faciliter la présentation de nos résultats nous allons convenir de toujours orienter canoniquement toutes nos arborescences dans le sens de la *convergence* vers la racine.

Avec cette convention, la preuve de Joyal du théorème de Cayley se résume ainsi. Soit A l'espèce *arborescence* et désignons par a_n le nombre d'arborescences sur un ensemble fini de n éléments ($n \geq 1$). En pointant l'espèce A nous obtenons une nouvelle espèce A_\bullet , appelée espèce *vertébré*. Cette terminologie est due au fait qu'une arborescence pointée possède une *colonne vertébrale* canoniquement définie par l'unique chemin joignant le sommet choisi ■ lors du pointage à la racine ★ de l'arborescence considérée. Cette colonne vertébrale est représentée par le chemin pointillé de la figure J. Le nombre de vertébrés sur n points est évidemment égal à na_n .

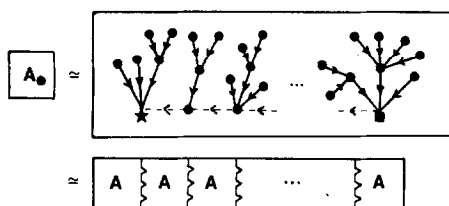


FIGURE J

La figure J montre aussi que la donnée d'un vertébré est canoniquement équivalente à la donnée d'une *suite finie non vide d'arborescences*. On peut donc écrire $A_{\bullet} \simeq L^*(A)$ où L^* désigne l'espèce *ordre total non vide*. Considérons maintenant l'espèce *endofonction non vide* désignée par Φ^* . En passant au graphe sagittal d'une endofonction (non vide) sur un ensemble de n éléments, on se rend compte que la donnée d'une telle endofonction n'est rien d'autre qu'une famille d'arborescences (disjointes) dont les racines sont disposées en cycles disjoints. On a donc l'isomorphisme $\Phi^* \simeq S^*(A)$ où S^* désigne l'espèce *permutation non vide*. Etant donné que $L^* \sim S^*$, on tire l'équipotence $A_{\bullet} \sim \Phi^*$. Comme il y a n^n endofonctions sur un ensemble de cardinalité n on en déduit que $na_n = n^n$, c'est-à-dire: $a_n = n^{n-1}$.

C'est cette démonstration que nous allons relever à un niveau combinatoirement équivalent à l'inversion de Lagrange. Auparavant, convenons de quelques autres définitions et notations.

Soit a une arborescence sur U (convergente vers sa racine). Si $v \in U$ est la source d'une flèche du graphe sous-jacent à a dont le but est $u \in U$ on dira que le sommet v est un *prédécesseur* du sommet u dans l'arborescence considérée.

Considérons maintenant une espèce R *fixée* quelconque. Nous allons associer à R deux nouvelles espèces

$$A = A_R \text{ et } \Phi = \Phi_R$$

appelées respectivement

espèce *arborescence R-enrichie*

et

espèce *endofonction R-enrichie*.

Voici comment ces espèces sont définies

DÉFINITION 2. Une structure d'espèce A (i.e., une arborescence R -enrichie) sur un ensemble fini U est la donnée

(i) d'une arborescence a quelconque sur U (canoniquement convergente vers sa racine)

et

(ii) pour chaque sommet $u \in U$, d'une structure d'espèce R sur l'ensemble (possiblement vide) des prédécesseurs du sommet u dans l'arborescence a .

Graphiquement, la figure 6 représente un exemple d'arborescence R -enrichie.

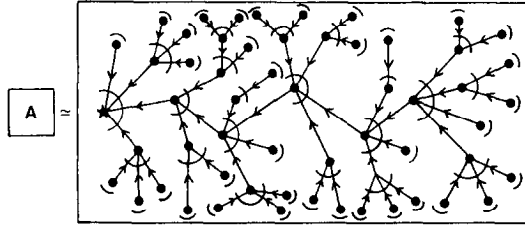


FIGURE 6

Ici ● et ★ désignent les éléments de l'ensemble U sous-jacent; l'unique ★ étant la racine de l'arborescence considérée. Pour chaque sommet $u \in U$ de cette figure, l'arc de cercle correspondant désigne la structure d'espèce R que l'on a placée sur l'ensemble F_u des prédécesseurs de u (remarquons que chaque F_u est en bijection canonique avec l'ensemble des flèches dont le but est u).

Lorsque R est l'espèce E (*ensemble*) alors une arborescence E -enrichie n'est rien d'autre qu'une arborescence au sens usuel; lorsque $R = 1 + C$ (l'espèce *cycle possiblement vide*) alors on peut appeler une arborescence $(1 + C)$ -enrichie *arborescence cyclique*, etc.

DÉFINITION 3. Une structure d'espèce Φ (i.e., une endofonction R -enrichie) sur un ensemble fini U est la donnée

(i) d'une endofonction quelconque $\varphi: U \rightarrow U$

et

(ii) d'une structure quelconque d'espèce R sur chaque fibre (possiblement vide) de l'endofonction φ .

Graphiquement, la figure 7 représente un exemple d'endofonction R -enrichie.

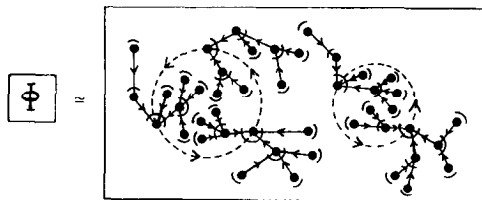


FIGURE 7

Les flèches du schéma désignent le graphe sagittal de l'endofonction ϕ , les flèches pointillées représentent ses cycles. A chaque sommet, l'arc de cercle représente la structure d'espèce R placée sur la fibre de ce sommet.

En se reportant aux définitions, le lecteur remarquera que dans le cas particulier où $R(\phi) = \phi$ l'espèce A_R est nécessairement triviale (i.e., vide). Dans tous les autres cas (i.e., $R(\phi) \neq \phi$) cette espèce n'est cependant pas triviale. Quant à l'espèce Φ_R , elle n'est *jamais* triviale; en effet, même dans le cas particulier $U = \phi$, l'unique endofonction $U \rightarrow U$ où $U = \phi$ a toutes ses fibres munies d'une structure d'espèce R puisque cette endofonction "dégénérée" ne possède aucune fibre.

Nous conviendrons des notations suivantes pour les séries génératrices des trois espèces que nous venons d'introduire

$$R(x) = \sum_{n \geq 0} r_n \frac{x^n}{n!}, \quad (3.1)$$

$$A(x) = A_R(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{n!}, \quad (3.2)$$

$$\Phi(x) = \Phi_R(x) = \sum_{n \geq 0} \phi_n \frac{x^n}{n!}. \quad (3.3)$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre théorème central. Ce résultat explicite les rapports structurels fondamentaux qui existent entre les espèces R , A_R et Φ_R .

THÉORÈME A. *Soient R une espèce fixée quelconque, $A = A_R$ l'espèce arborescence R -enrichie et $\Phi = \Phi_R$ l'espèce endofonction R -enrichie. Les propriétés suivantes sont alors satisfaites:*

(a) *L'espèce A est caractérisée par l'isomorphisme naturel*

$$A \simeq X \cdot R(A). \quad (3.4)$$

(b) *On a les isomorphismes naturels*

$$A_\bullet \simeq L(Q) \cdot A, \quad (3.5)$$

$$\Phi \simeq S(Q) \quad (3.6)$$

où L , S et Q désignent respectivement l'espèce ordre linéaire, l'espèce permutation et l'espèce $X \cdot R'(A)$.

(c) *Les espèces A et Φ sont reliées par la relation d'équipotence*

$$A_\bullet \sim \Phi \cdot A. \quad (3.7)$$

Démonstration. (a) Un simple regard sur la figure 6 montre que l'on peut former la figure 8 qui suit.

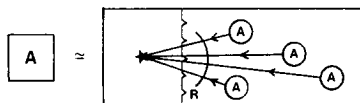


FIGURE 8

L'isomorphisme naturel (3.4) découle alors immédiatement des définitions de l'espèce X (singleton), du produit et de la composition $R(A)$ des espèces R et A .

(b) Considérons maintenant une structure quelconque d'espèce A_\bullet , c'est-à-dire une arborescence R -enrichie et pointée (en regard du langage utilisé plus haut on appelle une telle structure un *vertébré R -enrichi*). En prenant pour exemple la figure 6 on obtient la figure 9.

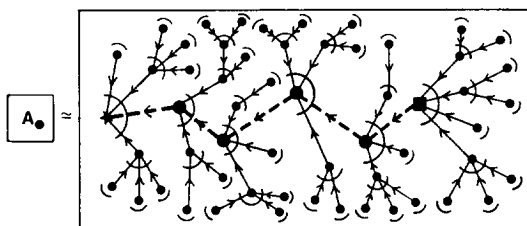


FIGURE 9

Ici le carré ■ (possiblement superposé à la racine ★) représente le point particulier choisi lorsque la structure d'espèce A a été pointée pour former celle, d'espèce A_\bullet , qui est maintenant considérée. La chaîne de flèches pointillées représente la *colonne vertébrale* de A , il s'agit de l'unique chaîne élémentaire qui joint le point ■ au point ★. La figure 9 fournit alors les deux figures suivantes.

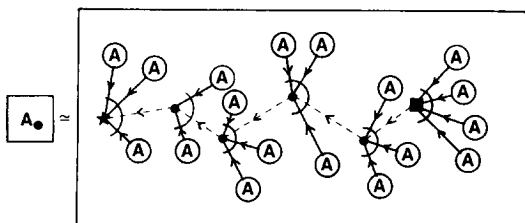


FIGURE 10

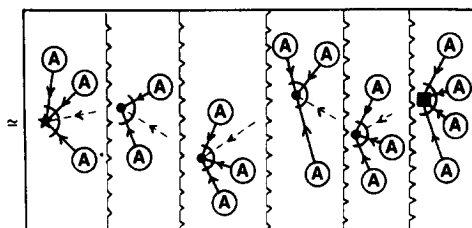


FIGURE 11

La figure 11 est obtenue par *découpage canonique* de la colonne vertébrale contenue dans la figure 10 (il est cependant essentiel de remarquer que les extrémités droites des flèches pointillées ont "perdu leur point" lors de ce découpage). Les structures de la forme

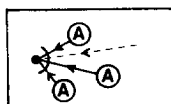


FIGURE 12

apparaissant dans la figure 11 sont des structures d'espèce $Q = X \cdot R'(A)$ (on s'en rend compte en remontant aux définitions des opérations générales sur les espèces). On a donc la situation suivante (cf. figure 11): la donnée d'une structure d'espèce A_\bullet est canoniquement équivalente à la donnée d'un ordre linéaire placé sur des structures (disjointes) d'espèce Q suivi d'une arborescence R -enrichie. Nous venons donc d'établir l'isomorphisme (3.5).

L'isomorphisme (3.6) s'obtient plus directement. En effet, en prenant pour exemple l'endofonction enrichie donnée par la figure 7, on obtient la figure 13.

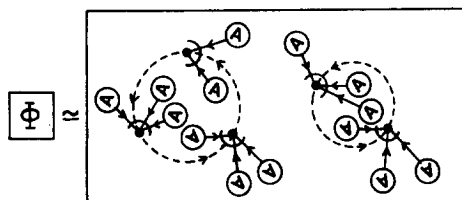


FIGURE 13

Ce qui montre bien que la donnée d'une structure d'espèce Φ est canoni-

quement équivalente à la donnée d'une permutation (décomposée en cycles) placée sur des structures (disjointes) d'espèce Q .

(c) Établissons finalement l'équipotence (3.7). Les espèces L (ordre linéaire) et S (permutation) ne sont pas isomorphes mais seulement équipotentes: $L \sim S$. En effectuant la composition (à droite) avec l'espèce Q , on obtient $L(Q) \sim S(Q)$ et, tenant compte de (3.5) et (3.6), on trouve

$$A_{\bullet} \simeq L(Q) \cdot A \sim S(Q) \cdot A \simeq \Phi \cdot A.$$

Ceci termine la démonstration du théorème.

Remarques. L'espèce $Q = X \cdot R'(A)$ qui entre en jeu dans le théorème est en fait isomorphe à l'espèce *contraction R -enrichie* (une contraction enrichie étant, par définition, une endofonction enrichie ultimement constante). Pour le voir, il suffit de changer en boucle la flèche pointillée de la figure 12.

La démonstration de (3.7) que l'on vient de donner peut aussi être interprétée géométriquement en utilisant une bijection quelconque (non canonique) $\beta_V: L(V) \simeq S(V)$ où V est l'ensemble des *buts* des flèches pointillées dans la figure 11 (i.e., les points de la colonne vertébrale distincts du carré ■). Cette bijection β_V permet de transporter l'ordre linéaire dont V est naturellement muni sur une permutation décomposée en cycles dans la figure 13. Ce transport permet d'attacher, une à une, les diverses structures d'espèce Q apparaissant dans la figure 11 aux points correspondants dans les cycles de la figure 13 (en prenant soin d'appliquer leur flèche pointillée sur la flèche pointillée correspondante via β_V dans les cycles).

Comme premier corollaire voici une généralisation de la formule de Cayley permettant de dénombrer les arborescences enrichies.

COROLLAIRE 1. *Soit R une espèce quelconque et désignons par $(r_n(\lambda))_{n \geq 0}$ la suite de type binomial associée à R :*

$$R \vdash (r_n(\lambda))_{n \geq 0}. \quad (3.8)$$

Le nombre a_n d'arborescences R -enrichies sur n points est donné par

$$a_n = r_{n-1}(n). \quad (3.9)$$

Démonstration. Définissons d'abord une espèce auxiliaire $\Psi = \Psi_R$ comme suit: une structure d'espèce Ψ sur un ensemble fini U est formée

- (i) d'un point distingué quelconque $\omega \in U$,
- (ii) d'une fonction quelconque $\psi: U \setminus \{\omega\} \rightarrow U$ et
- (iii) d'une structure quelconque d'espèce R sur chaque fibre (possiblement vide) de la fonction ψ .

Voici graphiquement (figure 14) une structure d'espèce Ψ :

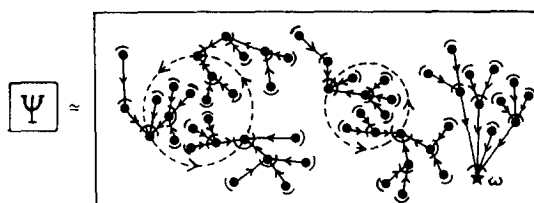


FIGURE 14

Ici \star désigne le point distingué ω duquel ne sort aucune flèche du graphe sagittal de ψ . Dans cette figure, désignons par V l'ensemble formé du point distingué ω ainsi que de tous les points (possiblement aucun) qui sont éventuellement envoyés sur ω par les itérées de ψ . Les flèches de ψ joignant les points de V munissent, de façon naturelle, l'ensemble V d'une structure d'espèce A puisqu'il ne peut y avoir de cycles dans V . Posons $W = U \setminus V$. Les flèches de ψ portées par les points de l'ensemble W munissent alors ce dernier d'une structure d'espèce Φ . On a donc l'isomorphisme

$$\Psi \simeq \Phi \cdot A. \quad (3.10)$$

Comparant (3.10) avec l'équipotence $A_{\bullet} \sim \Phi \cdot A$ contenue dans le théorème on obtient

$$A_{\bullet} \sim \Psi. \quad (3.11)$$

Dans le contexte des séries génératrices, cette équipotence prend la forme

$$A_{\bullet}(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \psi_n \frac{x^n}{n!} = \Psi(x). \quad (3.12)$$

Pour trouver la valeur de a_n il suffit donc de calculer ψ_n . Prenons $|U| = n$. La définition de l'espèce Ψ et l'interprétation combinatoire (2.7) pour les $r_n(\lambda)$ montrent que pour construire une structure de cette espèce sur U on a

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet n \text{ choix pour le point de base } \omega \\ \bullet r_{n-1}(n) \text{ choix pour la fonction } \psi: U \setminus \{\omega\} \rightarrow U \\ \quad \text{à fibres structurées par } R. \end{array} \right.$$

On en déduit donc que $n a_n = \psi_n = n r_{n-1}(n)$, ce qui montre que $a_n = r_{n-1}(n)$.

Remarquons que la version classique $a_n = n^{n-1}$ de la formule de Cayley pour les arborescences ordinaires correspond au choix $R = E$ où E est

l'espèce *ensemble* (i.e., $E(x) = e^x$). La démonstration donnée correspond dans ce cas particulier (à quelques modifications près) à celle de Joyal.

La formule d'inversion de Lagrange, *version simple*, fait l'objet de notre prochain corollaire. Nous allons voir qu'elle est en fait combinatoirement équivalente à la version généralisée de la formule de Cayley pour les arborescences enrichies (3.9) que nous venons de démontrer.

COROLLAIRE 2 (Formule de Lagrange, version simple). *Soit \mathbb{K} un corps (commutatif) quelconque de caractéristique zéro et supposons que $A(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ satisfait l'équation implicite*

$$A(x) = xR(A(x)) \quad (3.13)$$

où $R(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ est une série formelle donnée. Alors $A(x)$ possède le développement explicite

$$A(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (R(t))^n \Big|_{t=0} \cdot \frac{x^n}{n!}. \quad (3.14)$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas où les coefficients r_n de $R(x)$ sont des entiers ≥ 0 (i.e., des éléments de \mathbb{K} de la forme $k \cdot 1 = 1 + 1 + \dots + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$). On peut donc considérer R comme une espèce de structures. Par simple passage aux séries génératrices, l'isomorphisme $A \simeq X \cdot (R \circ A)$ du théorème s'écrit sous la forme (3.13). Etant donné que

$$(R(t))^n = \sum_{k \geq 0} r_k(n) t^k / k!, \quad (3.15)$$

la formule (3.14) découle alors immédiatement de (3.9), (3.15) et de l'unicité de la solution à (3.13) en remarquant que

$$r_{n-1}(n) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (R(t))^n \Big|_{t=0}. \quad (3.16)$$

Pour établir la formule (3.14) dans le cas général où $R(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ (i.e., lorsque les coefficients r_n sont des éléments quelconques du corps \mathbb{K}), il suffit de remarquer d'abord que, pour chaque $n \geq 0$ fixé, le coefficient de $x^n/n!$ dans le membre de droite de cette formule est un *polynôme* en r_0, r_1, \dots, r_n et d'invoquer ensuite le principe bien connu du prolongement des identités algébriques.

Voici maintenant un corollaire traitant du rapport existant entre l'énumération des endofonctions enrichies et celle des arborescences enrichies.

COROLLAIRE 3. Désignons par φ_n (resp. a_n) le nombre d'endofonctions (resp. d'arborescences) R -enrichies sur un ensemble de cardinalité n . On a alors

$$\varphi_n = r_n(n) \quad (3.17)$$

et, pour tout $n \geq 1$,

$$na_n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a_i \varphi_{n-i}, \quad \varphi_0 = 1, a_1 = r_0. \quad (3.18)$$

On peut aussi écrire

$$\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{n!} = r_0 x \exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{\varphi_k}{k} \cdot \frac{x^k}{k!} \right). \quad (3.19)$$

Démonstration. La formule (3.17) découle directement de la définition de l'espèce Φ et de l'interprétation combinatoire de $R \vdash (r_n(\lambda))_{n \geq 0}$ donnée en (2.7). Un passage aux séries génératrices dans les deux membres de la relation générale $A_\bullet \sim A \cdot \Phi$ (établie dans le théorème A) permet d'écrire

$$\sum_{n \geq 1} na_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{i \geq 1} a_i \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j \geq 0} \varphi_j \frac{x^j}{j!}. \quad (3.20)$$

On obtient (3.18) par identification du terme général des deux membres de cette égalité. L'équation (3.19) s'établit en résolvant (pour $A(x)$) l'équation différentielle formelle

$$xA'(x) = A(x) \cdot \Phi(x). \quad (3.21)$$

avec la "condition initiale" $A(0) = 0$, $A'(0) = r_0$.

Remarque. Dans le langage des suites de type binomial, la relation (3.18) prend la forme

$$nr_{n-1}(n) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} r_{i-1}(i) r_{n-i}(n-i), \quad n \geq 1. \quad (3.22)$$

Cette identité, qui n'était nullement évidente a priori, est en conséquence valable pour toute suite $(r_n(\lambda))_{n \geq 0}$ de type binomial sur un corps commutatif quelconque \mathbb{K} de caractéristique zéro. Le choix spécial $R(x) = e^x$ correspond à l'identité intéressante

$$n^n = \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geq 1}} \binom{n}{i} i^{i-1} j^j, \quad n \geq 1. \quad (3.23)$$

Non combinatoirement parlant, cette identité peut aussi être déduite formellement de l'identité bien connue [17] d'Abel:

$$(u + v + n)^n = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} u \cdot (u+i)^{i-1} (v+j)^j, \quad n \geq 0. \quad (3.24)$$

Il suffit pour cela de poser $v = 0$, d'effectuer la division $[(u+n)^n - n^n]/u$ et d'évaluer le quotient obtenu en $u = 0$.

L'identité d'Abel (3.24) possède elle-même une version enrichie que nous allons démontrer (section 7) en utilisant, encore une fois, une argumentation combinatoire. Pour le moment, nous devons poursuivre notre exploration des formules de Lagrange en introduisant la notion de *forêt d'arborescences enrichies*.

4. FORÊTS D'ARBORESCENCES ENRICHIES ET VERSION COMPOSÉE DE LA FORMULE DE LAGRANGE

Soit $\lambda \geq 1$ un entier fixé. En substituant l'espèce $A = A_R$ (*arborescence R-enrichie*) dans l'espèce $E_\lambda = X^\lambda/\lambda!$ (*ensemble de cardinalité λ*) on obtient l'espèce $A^\lambda/\lambda!$. C'est l'espèce *forêt de λ arborescences R-enrichies*. Une structure de cette espèce sur un ensemble fini U consiste donc en une partition de U en λ classes (non vides) sur chacune desquelles est placée une arborescence R -enrichie. Ecrivons la série génératrice de $A^\lambda/\lambda!$ sous la forme

$$(A^\lambda/\lambda!)(x) = (A(x))^\lambda/\lambda! = \sum_{n \geq \lambda} a_n^{(\lambda)} \frac{x^n}{n!}. \quad (4.1)$$

Avec ces notations, la formule de Cayley pour les forêts d'arborescences se généralise de la façon suivante.

COROLLAIRE 4. *Soit R une espèce quelconque et désignons par $(r_n(\lambda))_{n \geq 0}$ la suite de type binomial associée à R :*

$$R \vdash (r_n(\lambda))_{n \geq 0}. \quad (4.2)$$

Le nombre $a_n^{(\lambda)}$ de forêts de λ arborescences R -enrichies sur n points est donné par

$$a_n^{(\lambda)} = \frac{\lambda}{n} \binom{n}{\lambda} r_{n-\lambda}(n), \quad n \geq \lambda. \quad (4.3)$$

Démonstration. Définissons pour chaque $\lambda \geq 1$ une espèce auxiliaire

$\Psi^{(\lambda)} = \Psi_R^{(\lambda)}$ comme suit: une structure d'espèce $\Psi^{(\lambda)}$ sur un ensemble fini U est formée

- (i) d'une partie quelconque $A \subseteq U$ de cardinalité λ ,
- (ii) d'un point distingué quelconque $\omega \in A$,
- (iii) d'une fonction quelconque $\psi: U \setminus A \rightarrow U$ et
- (iv) d'une structure quelconque d'espèce R sur chaque fibre (possiblement vide) de la fonction ψ .

Graphiquement, la figure 15 représente une structure d'espèce $\Psi^{(\lambda)}$.

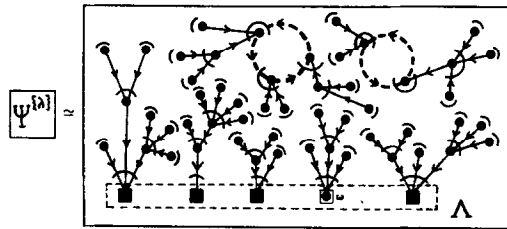


FIGURE 15

Ici les ■ désignent les éléments de la partie A et le ● désigne le point distingué ω de A . En fait, l'espèce $\Psi^{(\lambda)}$ constitue une généralisation de l'espèce Ψ introduite plus haut car en prenant $\lambda = 1$ on obtient $\Psi^{(1)} \simeq \Psi$. Nous allons d'abord montrer que

$$[A^\lambda/\lambda!]_\bullet \sim \Psi^{(\lambda)}. \quad (4.4)$$

Pour ce faire, pointons une forêt de λ arborescences R -enrichies. Pointer une telle forêt revient à pointer l'une de ses arborescences (R -enrichies). Représentons par un ● ce point spécial; on a génériquement la figure suivante.

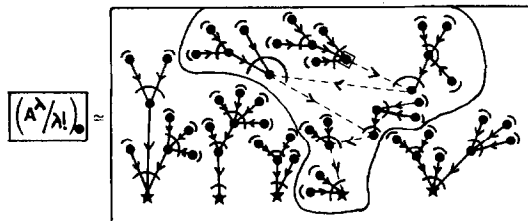


FIGURE 16

L'une des arborescences de la forêt est donc devenue un vertébré (R -enrichi). Remplaçons ce vertébré par un couple formé d'une endofonction φ (R -enrichie) et d'une arborescence a (ceci peut se faire bijectivement à cause de (3.7) du théorème A). Nous obtenons la figure 17.

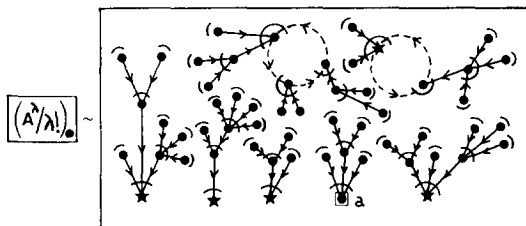


FIGURE 17

Cette dernière structure est isomorphe à la structure générique d'espèce $\Psi^{(\lambda)}$ comme le montre la figure (15). En effet, cette figure explicite justement l'arborescence a (qui s'identifie à l'arborescence dont la racine est \blacksquare) ainsi que l'endofonction φ (qui s'identifie aux ex-cycles qui entrent en jeu). Dans le contexte des séries génératrices, l'équipotence (4.4) prend la forme

$$[A^{\lambda}/\lambda!]_{\bullet}(x) = \sum_{n \geq \lambda} na_n^{(\lambda)} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq \lambda} \psi_n^{(\lambda)} \frac{x^n}{n!} = \Psi^{(\lambda)}(x). \quad (4.5)$$

Pour trouver la valeur de $a_n^{(\lambda)}$ il suffit donc de trouver $\psi_n^{(\lambda)}$. Pour construire une structure d'espèce $\Psi^{(\lambda)}$ sur U (où $|U| = n$) on a

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \binom{n}{\lambda} \text{ choix pour la partie } A \subseteq U \text{ de cardinalité } \lambda \\ \bullet \lambda \text{ choix pour le point distingué } \omega \in A \\ \bullet r_{n-\lambda}(n) \text{ choix pour la fonction } \psi: U \setminus A \rightarrow U \\ \quad \text{dont les fibres sont structurées par } R. \end{array} \right.$$

On en conclut donc que $na_n^{(\lambda)} = \psi_n^{(\lambda)} = \binom{n}{\lambda} \lambda r_{n-\lambda}(n)$; d'où (4.3).

La formule d'inversion de Lagrange, *version composée*, est en fait combinatoirement équivalente à la version généralisée de la formule de Cayley pour les forêts de λ arborescences enrichies que nous venons d'établir.

COROLLAIRE 5 (Formule de Lagrange, version composée). *Soit \mathbb{K} un corps (commutatif) de caractéristique zéro et supposons que $A(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ satisfait l'équation implicite*

$$A(x) = xR(A(x)) \quad (4.6)$$

où $R(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ est une série formelle donnée. Alors pour tout $F(x) \in \mathbb{K}[[x]]$ on a le développement explicite

$$F(A(x)) = F(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} F'(t)(R(t))^n \Big|_{t=0} \frac{x^n}{n!}. \quad (4.7)$$

Démonstration. Pour les mêmes raisons que celles qui ont été invoquées dans la démonstration de la version simple de la formule de Lagrange (corollaire 2), il suffit de ne considérer que le cas où les coefficients de F et de R sont des entiers ≥ 0 (i.e., quand F et R sont identifiables à des espèces). De plus, la linéarité (en F) de l'expression (4.7) montre que pour démontrer cette dernière il suffit de ne considérer que les cas où F est l'espèce $X^\lambda/\lambda!$, $\lambda = 0, 1, 2, \dots$. Le cas $\lambda = 0$ donne trivialement le terme constant dans (4.7). Lorsque $\lambda > 0$, l'espèce $F(A) = A^\lambda/\lambda!$ est l'espèce *forêt de λ arborescences R -enrichies*. La formule (4.7) s'obtient alors de (4.3) en remarquant que l'on a, avec ce choix pour F ,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{n} \binom{n}{\lambda} r_{n-\lambda}(n) &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{t^\lambda}{\lambda!} \right)' (R(t))^n \Big|_{t=0}, \\ &= \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} F'(t)(R(t))^n \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Remarque. Lorsque F et R sont des espèces de structures, la donnée d'une structure d'espèce $F(A) = F \circ A$ sur un ensemble fini U est la donnée d'une forêt, sur U , d'arborescences (R -enrichies) doublée de la donnée d'une structure d'espèce F sur l'ensemble des arborescences de cette forêt. La version composée (4.7) de la formule de Lagrange apparaît donc comme une méthode permettant d'énumérer les forêts enrichies qui sont structurées de cette façon. Dans le cas particulier où $F = e^X$, l'espèce $F(A) = e^A$ est l'espèce *forêt d'arborescences R -enrichies*; le cas où $F = C$ (cycle) conduit à l'espèce *haie circulaire d'arborescences R -enrichies*, etc.

5. ARBRES ENRICHIS

L'espèce *arbre R -enrichi*, désignée par $\mathcal{A} = \mathcal{A}_R$, est intimement liée à celle d'*arborescence R -enrichie*. Nous la définissons comme suit.

DÉFINITION 4. Une structure d'espèce \mathcal{A} (i.e., un *arbre R -enrichi*) sur un ensemble fini U est la donnée

- (i) d'un arbre α quelconque sur U

et

(ii) pour chaque sommet $u \in U$ d'une structure quelconque d'espèce R sur l'ensemble de toutes les arêtes incidentes à u dans l'arbre α .

Voici graphiquement (figure 18) un arbre R -enrichi.

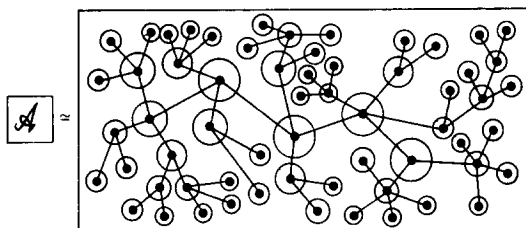


FIGURE 18

Les *circonférences* désignent les diverses structures d'espèce R associées aux sommets de l'arbre.

Lorsque $R = E$ (l'espèce *ensemble*) alors un arbre E -enrichi est simplement un arbre au sens classique du terme. Lorsque $R = 1 + C$ (l'espèce *cycle possiblement vide*) alors un arbre $(1 + C)$ -enrichi peut aussi être appelé *arbre cyclique* (ou *planaire* [8]), etc.

La série génératrice associée à $\mathcal{A} = \mathcal{A}_R$ sera désignée par

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_R(x) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \frac{x^n}{n!}. \quad (5.1)$$

Voici un théorème structural décrivant plus à fond la nature combinatoire de l'espèce *arbre R -enrichi*.

THÉORÈME B. Soit R une espèce fixée quelconque et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_R$ l'espèce *arbre R -enrichi*. Les propriétés suivantes sont alors satisfaites:

(a) l'espèce \mathcal{A} est caractérisée par les isomorphismes naturels

$$\mathcal{A}_\bullet \simeq X \cdot R(B) \text{ où } B \simeq X \cdot R'(B) \quad (5.2)$$

est l'espèce arborescence R' -enrichie.

(b) Les espèces \mathcal{A} et B sont reliées par l'isomorphisme naturel

$$X^2 \cdot \mathcal{A}'' \simeq [B^2/2!]\bullet. \quad (5.3)$$

Démonstration. (a) Pointons l'arbre R -enrichi décrit génériquement par la figure 18 à l'aide d'une racine (\star). Orientons ensuite canoniquement le graphe obtenu en faisant converger les flèches vers la racine. On obtient alors les figures 19 et 20.

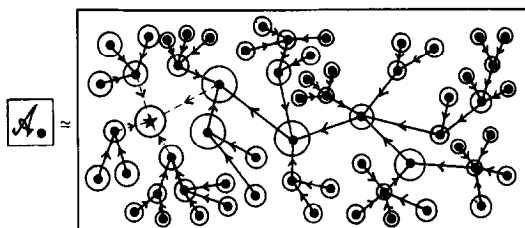


FIGURE 19

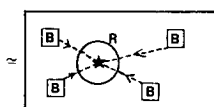


FIGURE 20

Ceci montre que $\mathcal{A} \simeq X \cdot R(B)$ où B est l'espèce génériquement décrite par

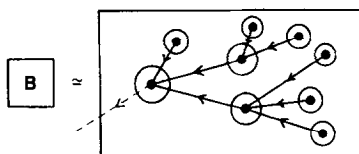


FIGURE 21

Or, à cause de la définition générale de l'espèce dérivée R' , on a l'isomorphisme

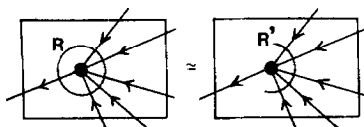


FIGURE 22

Ceci permet de conclure que B est l'espèce *arborescence* R' -enrichie, i.e., $B \simeq X \cdot R'(B)$.

(b) L'isomorphisme (5.3) peut être démontré de deux façons. La première démonstration est totalement formelle. Elle consiste en une

application de l'opérateur de dérivation aux deux membres de $\mathcal{A}_\bullet \simeq X \cdot R(B)$ suivie d'une multiplication par X . Ceci donne

$$\begin{aligned} X \cdot \mathcal{A}' + X^2 \cdot \mathcal{A}'' &\simeq X \cdot R(B) + X \cdot R'(B) \cdot X \cdot B' \\ &\simeq X \cdot \mathcal{A}' + B \cdot X \cdot B' \end{aligned}$$

d'où l'on tire par "soustraction"

$$X^2 \cdot \mathcal{A}'' \simeq B \cdot B_\bullet \simeq [B^2/2!]_\bullet.$$

La seconde démonstration est moins algébrique. Elle est en fait purement conceptuelle. Pour la décrire remarquons d'abord que la donnée d'une structure d'espèce $X^2 \cdot \mathcal{A}''$ sur un ensemble fini U c'est la donnée d'une structure d'espèce \mathcal{A} qui est "bipointée" par un couple ordonné (u, v) de points *distincts* de U . Ce bipointage fournit une colonne vertébrale *non-dégénérée* et on a graphiquement

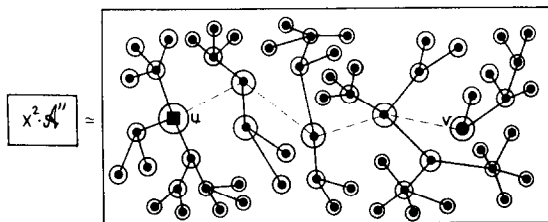


FIGURE 23

En découpant, en son milieu, le segment pointillé incident au sommet u on obtient successivement les figures 24 et 25.

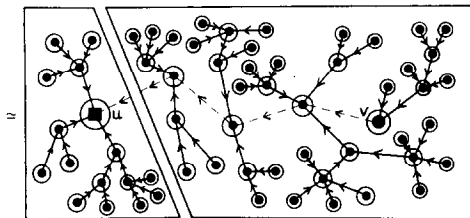


FIGURE 24

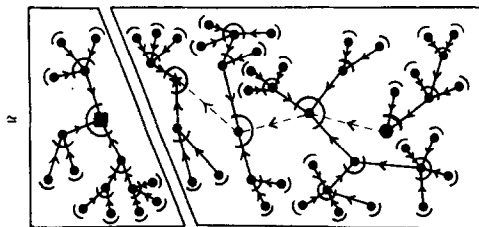


FIGURE 25

Ce dernier diagramme explicite justement une structure générique d'espèce *forêt pointée à deux arborescences R' -enrichies*, i.e., l'espèce $[B^2/2!]_{\bullet}$. Ceci termine la démonstration du théorème.

Le résultat classique de Cayley qui dit que le nombre d'arbres étiquetés par les entiers de 1 à n est donné par n^{n-2} se généralise, dans notre contexte, comme suit.

COROLLAIRE 6. Soit R une espèce quelconque et désignons par $(\rho_n(\lambda))_{n \geq 0}$ la suite de type binomial associée à l'espèce dérivée R' :

$$R' \vdash (\rho_n(\lambda))_{n \geq 0}. \quad (5.4)$$

Le nombre α_n d'arbres R -enrichis sur n points est donné par

$$\begin{aligned} \alpha_n &= r_0 & \text{si } n &= 1 \\ &= \rho_{n-2}(n) & \text{si } n > 1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Démonstration. L'espèce $[B^2/2!]$ entrant en jeu dans l'isomorphisme (5.3) du théorème B est l'espèce *forêt de 2 arborescences R' -enrichies*. On a donc, à cause de (4.3), un total de $2 \binom{n}{2} \rho_{n-2}(n)/n$ telles forêts sur un ensemble de cardinalité $n \geq 2$. L'isomorphisme $X^2 \cdot \mathcal{A}'' \simeq [B^2/2!]_{\bullet}$ permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} n(n-1) \alpha_n \frac{x^n}{n!} &= x^2 \mathcal{A}''(x) = x \frac{d}{dx} [B^2(x)/2!] \\ &= \sum_{n \geq 2} 2 \binom{n}{2} \rho_{n-2}(n) \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

On obtient donc $\alpha_n = \rho_{n-2}(n)$ pour $n \geq 2$. Le cas $n = 1$ donne $\alpha_1 = r_0$ comme on le vérifie directement.

6. FEUILLES ET SUITES DE TYPE BINOMIAL

Tournons-nous maintenant vers le concept de *feuille*. Lorsque $|U| = n > 1$, une feuille d'un arbre enrichi (ou d'une arborescence enrichie) sur U c'est, par définition, un sommet de degré un du graphe sous-jacent (on exclut la racine dans le cas d'une arborescence). Lorsque $|U| = n = 1$, le point unique de l'arbre ou de l'arborescence sera (pour des raisons techniques) exceptionnellement toujours considéré comme une feuille.

Les problèmes d'énumération, d'espérance mathématique et de calcul de moments relatifs aux feuilles des arbres et des arborescences enrichis sont intimement reliés aux suites de type binomial. Avant de les aborder, nous allons approfondir un peu plus le concept de suite de type binomial associée à une espèce donnée.

DÉFINITION 5. Soit R une espèce quelconque. L'espèce R^* définie par

$$\begin{aligned} R^*(U) &= \phi & \text{si } U &= \phi \\ &= R(U) & \text{si } U \neq \phi \end{aligned} \quad (6.1)$$

est appelée l'espèce *normalisée* associée à R . On écrira $R^* \vdash (r_n^*(\lambda))_{n \geq 0}$. On notera que l'espèce R^* "oublie" les structures d'espèce R sur l'ensemble vide. Effectuant un passage aux séries génératrices on a

$$(R(x))^\lambda = (r_0 + R^*(x))^\lambda = \sum_{k=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{k} r_0^k (R^*(x))^{\lambda-k} \quad (6.2)$$

$$= \sum_{i=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{i} r_0^{\lambda-i} (R^*(x))^i. \quad (6.3)$$

En identifiant maintenant le coefficient de $x^n/n!$ dans ces expressions on obtient les formules suivantes qui relient les suites $(r_n(\lambda))_{n \geq 0}$ et $(r_n^*(\lambda))_{n \geq 0}$

$$r_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{k} r_0^k r_n^*(\lambda - k) \quad (6.4)$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{\lambda}{i} r_0^{\lambda-i} r_n^*(i). \quad (6.5)$$

Il est important de remarquer que, contrairement à (6.4), la borne supérieure dans la sommation (6.5) est *indépendante* de la variable λ puisque $r_n^*(i) = 0$ lorsque $i > n$. Comme les nombres $r_n^*(i)$ sont eux aussi indépendants de λ on en déduit que dans le cas particulier où l'espèce R satisfait $R(0) = r_0 = 1$, alors la suite $(r_n(\lambda))_{n \geq 0}$ est une suite de *polynômes* en λ (et $\deg r_n(\lambda) \leq n$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$). Ce sont les suites polynomiales de type binomial

mentionnées dans la section 2. Les notations introduites dans la définition 5 nous permettent d'énoncer notre prochain corollaire.

COROLLAIRE 7. *Soit R une espèce quelconque, désignons par R^* et R'^* les espèces normalisées associées à R et R' et posons*

$$\begin{aligned} R &\vdash (r_n(\lambda))_{n \geq 0}, & R' &\vdash (\rho_n(\lambda))_{n \geq 0}, \\ R^* &\vdash (r_n^*(\lambda))_{n \geq 0}, & R'^* &\vdash (\rho_n^*(\lambda))_{n \geq 0}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Soit U un ensemble quelconque de cardinalité $n \geq 1$. Alors

(a) *Le nombre $a_{n,k}$ d'arborescences R -enrichies sur U possédant exactement $k(\leq n)$ feuilles est donné par*

$$a_{n,k} = r_0^k \binom{n}{k} r_{n-1}^*(n-k). \quad (6.7)$$

Lorsqu'il s'agit plutôt d'arbres R -enrichis sur U ce nombre est

$$\alpha_{n,k} = r_1^k \binom{n}{k} \rho_{n-2}^*(n-k) \quad \text{si } n > 1, \quad (6.8)$$

$$= r_0 \quad \text{si } n = 1 \text{ et } k = 1, \quad (6.9)$$

$$= 0 \quad \text{si } n = 1 \text{ et } k = 0. \quad (6.10)$$

(b) *L'espérance mathématique m_n du nombre de feuilles d'une arborescence aléatoire R -enrichie sur U est donnée par*

$$m_n = r_0 n \frac{r_{n-1}(n-1)}{r_{n-1}(n)}. \quad (6.11)$$

Lorsqu'il s'agit plutôt d'arbres R -enrichis aléatoires cette espérance est

$$\mu_n = r_1 n \frac{\rho_{n-2}(n-1)}{\rho_{n-2}(n)} \quad \text{si } n > 1, \quad (6.12)$$

$$= 1 \quad \text{si } n = 1. \quad (6.13)$$

Démonstration. (a) Un point $u \in U$ est une feuille d'arborescence R -enrichie si l'ensemble des flèches qui aboutissent à u est vide. Pour chaque feuille il y a r_0 structures possibles, d'espèce R , sur cet ensemble "vide" de flèches. Le nombre d'arborescences R -enrichies sur U possédant k feuilles est donc de la forme $c_{n,k} r_0^k$ où $c_{n,k}$ est une constante indépendante de r_0 . Faisant varier k de 0 à n on en déduit que le nombre total $r_{n-1}(n)$ d'arborescences R -enrichies sur U est un polynôme en r_0 de degré $\leq n$. Pour identifier ce

polynôme il suffit de remarquer que la formule (6.4) exprimant les $r_n(\lambda)$ en termes des $r_n^*(\lambda - k)$ prend, dans notre contexte (i.e., lorsque n est remplacé par $n - 1$ et que λ est remplacé par n) la forme

$$\begin{aligned} r_{n-1}(n) &= \sum_{k=0}^n c_{n,k} r_0^k \\ &= \sum_{k=0}^n r_0^k \binom{n}{k} r_{n-1}^*(n-k). \end{aligned} \quad (6.14)$$

D'où la formule (6.7). Notons que dans le cas dégénéré $n = 1$, la formule (6.7) donne $a_{1,1} = r_0$. Ceci est conforme à notre convention qui considère exceptionnellement comme une feuille le point unique d'une arborescence à un point. Dans le cas des arbres R -enrichis, les formules (6.9) et (6.10) sont immédiates. Pour établir (6.8) on procède de façon analogue au cas des arborescences en prenant cependant soin de remplacer $r_n(\lambda)$ par $\rho_n(\lambda)$ (noter que dans ce cas, r_0 est remplacé par r_1).

(b) Le nombre total de feuilles rencontrées lorsque l'on dresse la liste complète de toutes les arborescences R -enrichies sur U est donné par

$$\sum_{k=0}^n k a_{n,k} = \sum_{k=0}^n k c_{n,k} r_0^k = r_0 \frac{\partial}{\partial r_0} r_{n-1}(n). \quad (6.15)$$

Puisque $r_0(\partial/\partial r_0) R^\lambda(x) = r_0 \lambda R^{\lambda-1}(x)$, on peut écrire la formule

$$r_0 \frac{\partial}{\partial r_0} r_n(\lambda) = r_0 \lambda r_n(\lambda - 1). \quad (6.16)$$

Pour déterminer l'espérance m_n cherchée il suffit donc, en regard de (6.15), de remplacer n par $n - 1$ et λ par n dans (6.16) et de diviser ensuite le résultat obtenu par $r_{n-1}(n)$ (nombre total des arborescences R -enrichies). Dans le cas des arbres R -enrichis, l'espérance μ_n s'obtient de façon semblable en utilisant cette fois R' et l'opérateur différentiel $r_1(\partial/\partial r_1)$.

Remarque. Plus généralement, en faisant appel aux opérateurs $r_0^{(v)}(\partial^v/\partial r_0^v)$ dans la preuve que nous venons de donner, le lecteur vérifiera que pour tout $v > 1$, le moment factoriel $m_n^{(v)}$ d'ordre v de la variable aléatoire "nombre de feuilles d'une arborescence R -enrichie, sur n points, prise au hasard" est donné par

$$m_n^{(v)} = r_0^{(v)} \cdot n(n-1) \cdots (n-v+1) \cdot \frac{r_{n-1}(n-v)}{r_{n-1}(n)}. \quad (6.17)$$

Dans le cas des arbres R -enrichis, le moment factoriel $\mu_n^{(v)}$ correspondant est

$$\mu_n^{(v)} = r_1^v \cdot n(n-1) \cdots (n-v+1) \cdot \frac{\rho_{n-2}(n-v)}{\rho_{n-2}(n)}. \quad (6.18)$$

Lorsque $R = e^X$, les formules (6.11) et (6.12) prennent les formes particulières

$$m_n = n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \sim \frac{n}{e} (n \rightarrow \infty), \quad (6.19)$$

$$\mu_n = n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} \sim \frac{n}{e} (n \rightarrow \infty). \quad (6.20)$$

Ces deux derniers résultats sont bien connus, voir par exemple Moon [11].

7. HAIES D'ARBORESCENCES ENRICHIES ET IDENTITÉS D'ABEL ENRICHIES

L'identité d'Abel

$$(u+v+n)^n = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} u \cdot (u+i)^{i-1} (v+j)^j \quad (7.1)$$

rencontrée dans la section 3 possède, elle aussi, une version enrichie que nous allons obtenir à l'aide des propriétés de deux nouvelles espèces: $A^\lambda = (A_R)^\lambda$ et $A^{[\lambda]} = (A_R)^{[\lambda]}$. En regard de la définition du produit des espèces, A^λ s'identifie canoniquement à l'espèce *haie de λ arborescences R -enrichies* (i.e., λ arborescences mises bout-à-bout). L'espèce $A^{[\lambda]}$ est, quant à elle, définie à partir de A^λ en *pointant* la dernière arborescence de la haie.

COROLLAIRE 8 (Identité d'Abel enrichie). *Pour toute suite de type binomial $(r_n(\lambda))_{n \geq 0}$ sur un corps commutatif \mathbb{K} de caractéristique zéro on a la formule*

$$r_n(u+v+n) = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} u \cdot \frac{r_i(u+i)}{u+i} \cdot r_j(v+j), \quad n \geq 0. \quad (7.2)$$

Démonstration. Il suffit de ne considérer que les cas où $u, v \in \mathbb{N}$ et $R \vdash (r_n(\lambda))_{n \geq 0}$ où R est une espèce de structures arbitraire. Un calcul direct basé sur (4.3) montre qu'au niveau des séries génératrices on peut écrire

$$A^u(x) = x^u \cdot \sum_{i \geq 0} u \cdot \frac{r_i(u+i)}{u+i} \cdot \frac{x^i}{i!} \quad (7.3)$$

où $A(x) = A_R(x)$. On a de plus

$$A^{[v]}(x) = x^v \cdot \sum_{j \geq 0} r_j(v+j) \cdot \frac{x^j}{j!} \quad (7.4)$$

puisque $vA^{[v]}(x) = (A^v)_\bullet(x) = x \cdot (d/dx) A^v(x)$. L'identité d'Abel enrichie apparaît donc comme la version énumérative de l'isomorphisme

$$A^{[u+v]} \simeq A^u \cdot A^{[v]} \quad (7.5)$$

qui signifie simplement qu'une haie de $u+v$ arborescences dont la dernière arborescence est pointée est une haie de u arborescences suivie d'une haie de v arborescences dont la dernière arborescence est pointée.

Remarque. Il existe une version parente [17] de l'identité d'Abel qui est tout à fait symétrique en u et v :

$$(u+v)(u+v+n)^{n-1} = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} u \cdot (u+i)^{i-1} v \cdot (v+j)^{j-1}, \quad n \geq 0 \quad (7.6)$$

En termes de haies enrichies on a la formule plus générale

$$(u+v) \cdot \frac{r_n(u+v+n)}{(u+v+n)} = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} u \cdot \frac{r_i(u+i)}{u+i} \cdot v \cdot \frac{r_j(v+j)}{v+j}, \quad n \geq 0 \quad (7.7)$$

qui, en regard de (7.3), exprime énumérativement l'isomorphisme

$$A^{u+v} \simeq A^u \cdot A^v \quad (7.8)$$

qui signifie qu'une haie de $u+v$ arborescences est une haie de u arborescences suivie d'une haie de v arborescences. Notons aussi que (7.7) montre que pour toute suite de type binomial $(r_n(\lambda))_{n \geq 0}$, la suite

$$\left(\frac{\lambda r_n(\lambda+n)}{\lambda+n} \right)_{n \geq 0} \quad (7.9)$$

est aussi une suite de type binomial. A l'aide d'approches totalement différentes de celle que nous venons de donner, ce fait a déjà été remarqué dans [19] et [9] pour le cas spécial où les $r_n(\lambda)$ sont des polynômes.

REMERCIEMENTS

L'auteur désire remercier particulièrement A. Joyal, J. Labelle et P. Leroux (membres de l'équipe de combinatoire de l'Université du Québec à Montréal) ainsi que H. Décoste (de l'Université de Montréal) pour leurs nombreuses suggestions ainsi que pour leur encouragement constant.

REFERENCES

1. A. CAYLEY, A theorem on trees, *Quart. J. Math.* **23** (1889), 376–378; *Collect. Pap. Cambridge* **13** (1897), 26–28.
2. L. CHOTTIN, "Énumération d'arbres et formules d'inversion de séries formelles," UER de Mathématiques et Informatique, Laboratoire associé au CNRS (226), No. 7903, 1979.
3. L. COMTET, "Analyse combinatoire," Tome premier, Presses Universitaires de France, Coll. SUP, 1970.
4. A. JOYAL, Une théorie combinatoire des séries formelles, *Adv. in Math.* **42** (1981), 1–82.
5. A. M. GARSIA ET S. A. JONI, A new expression for umbral operators and power series inversion, *Proc. Amer. Math. Soc.* **64** (1977), 179–185.
6. E. GOURSAT, "Cours d'analyse mathématique," 5th ed., Gauthier-Villars, Paris, 1956.
7. W. GRÖBNER, "Monatshefte für Mathematik," LXVI Bond, 1962.
8. J. LABELLE, Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures, à paraître.
9. G. LABELLE, Sur l'inversion et l'itération continue des séries formelles, *J. Eur. Combin.* **1**, No. 2 (1980), 113–138.
10. J. L. LAGRANGE, "Oeuvres," Gauthier-Villars, Paris, 1867–1892.
11. J. W. MOON, "Counting Labelled Trees," Monographies Canadiennes de Mathématiques, Vol. 1, Société Mathématique du Canada, 1970.
12. J. W. MOON, Another proof of Cayley's formula for counting trees, *Amer. Math. Monthly* **70** (1963), 846–847.
13. J. W. MOON, Various proofs of Cayley's formula for counting trees, in "A Seminar on Graph Theory" (F. Harary, Ed.), pp. 70–79, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1967.
14. E. H. NEVILLE, The codifying of tree-structure, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **49** (1953), 381–385.
15. H. PRÜFER, Never Beweis eines Satzes über Permutationen, *Arch. Math. Phys.* **27** (1918), 142–144.
16. G. N. RANEY, Functional composition patterns and power series reversion, *Trans. Amer. Math. Soc.* **94** (1960), 441–451.
17. J. RIORDAN, "Combinatorial Identities," Wiley, New York, 1968.
18. G.-C. ROTA, "Finite Operator Calculus," Academic Press, New York, 1975.
19. G.-C. ROTA AND R. MULLIN, "On the Foundations of Combinatorial Theory, Graph Theory and Applications," pp. 167–213, Academic Press, New York, 1970.
20. G.-C. ROTA AND S. M. ROMAN, The umbral calculus, *Adv. Math.* **27** (1978), 95–188.
21. E. T. WHITTAKER AND G. N. WATSON, "A Course of Modern Analysis," 4th ed., Cambridge Univ. Press, London/New York, 1962.